Exercice corrigé

Exercice. Soit K un corps commutatif, sur le K-espace vectoriel K[X]. On considère les applications u, v: K[X] → K[X] définies par:

$u(P) = \frac{P(X)-P(0)}{X}$

Et $v(P) = XP(X)$

1) Vérifier que u et v sont linéaires.

2) Calculer uov et vou.

3) Montrer que u est surjective puis que v est injective.

4) Quelle est la nature de l'endomorphisme vou?

Correction.

1) Soit α ϵ K et P, Q ϵ K[X]. Alors

$$u(\alpha P + Q) = \frac{(\alpha P+Q)(X)-(\alpha P+Q)(0)}{X}$$
$$= \frac{(\alpha P)(X)+Q(X)-(\alpha P)(0)-Q(0)}{X}$$
$$= \frac{\alpha P(X)+Q(X)-\alpha P(0)-Q(0)}{X}$$
$$= \alpha \frac{P(X)-P(0)}{X} + \frac{Q(X)-Q(0)}{X}$$
$$= \alpha\, u(P) + u(Q).$$

Donc u est linéaire.

De même $v(\alpha P + Q) = X.(\alpha P + Q)(X) = X.(\alpha P)(X) + X.Q(X) = \alpha X.P(X) + X.Q(X)$
$= \alpha\, v(P) + v(Q)$.

Donc v est linéaire.

2) ° *Calculer uov* :

On a $(uov)(P)= u(v(P))= u(X.P(X))$

$$= \frac{X.P(X)-0.P(0)}{X} = P(X).$$

Ainsi $uov = Id_{K[X]}$.

° *Calculer vou* :

On a $(vou)(P)= v(u(P))= X.\frac{P(X)-P(0)}{X}$

$= P(X) - P(0)$.

3) ° *Montrer que u est surjective :*

Soit Q ϵ K[X]. Comme $uov = Id_{K[X]}$ alors $(uov)(Q) = Q$. Donc $u(v(Q)) =Q$; ainsi $Q= u(P)$ avec $P= v(Q)$. C'est-à-dire que Q ϵ Im(u). De plus comme Im(u) est un sous-espace vectoriel de K[X] alors Im(u)= K[X]. Par conséquent u est surjective.

° *Montrer que v est injective :*

Soit $P \in Ker(v)$ alors $0= v(P)= X.P(X)$. Donc $P(X)=0$ car $K[X]$ est un anneau intègre. Par conséquent $P = 0_{K[X]}$; ainsi $Ker(v)= \{0_{K[X]}\}$ et v est injective.

4) ***<u>La nature de l'endomorphisme vou :</u>***

On a $(vou)(P)= P(X)- P(0)$. Posons $h = vou$ alors $h^2(P) = h(h(P)) = h(P(X)- P(0)) = h(f) = f(X)- f(0)$ avec $f(X)= P(X)- P(0)$ et donc $f(0)= P(0)- P(0)=0$.

Ainsi $h^2(P) = h(f)= f(X)= P(X)- P(0)= h(P)$. Par conséquent $h^2= h$.

En conclusion h= vou est une projection sur Im(vou) parallèlement à Ker(vou).

De plus $Im(vou) = Vect\{(vou)(1), (vou)(X), (vou)(X^2),\ldots\} = Vect\{X, X^2,\ldots\}$.

Et $Ker(vou)= \{P \in K[X] \,/\, (vou)(P)= P(X)- P(0)=0\}$

$= \{ P \in K[X] \,/\, P(X)=P(0)\}$

$= \{P=a.1 \,/\, a \in K\}= Vect\{1\}$.